Expression de la force

Définition : Force centrale

La force $\vec{F}$ à laquelle est soumis un point matériel situé au point M d'un référentiel $\mathscr{R}$ est dite ***centrale*** s'il existe un point O fixe de $\mathscr{R}$ tel que $\vec{F}$ reste toujours colinéaire à $\overrightarrow{OM}$ au cours du mouvement de M.

Expression d'une force centrale conservative

Soit un point matériel de position M soumis à la force $\vec{F}$ centrale de centre O, repéré par le vecteur $\vec{e}_r$ tel que $\overrightarrow{OM} = \underbrace{r}_{\geqslant 0} \vec{e}_r$. La force $\vec{F}$ est conservative ssi son intensité ne dépend que de la distance $r = OM$. On a alors :

$$\vec{F} = F_r(r)\vec{e}_r \qquad \text{et } F_r(r) = -\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_{\text{pot}}(r)}{\mathrm{d}r},$$

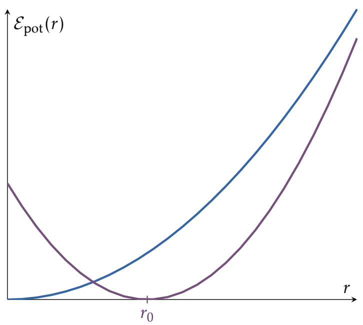
avec $\mathscr{E}_{\text{pot}}(r)$ une énergie potentielle associée qui ne dépend également que de r.
La force est dite :

répulsive pour $F_r(r) > 0$ *ie* $\mathscr{E}_{\text{pot}}(r)$ décroissante,

attractive pour $F_r(r) < 0$ *ie* $\mathscr{E}_{\text{pot}}(r)$ croissante.

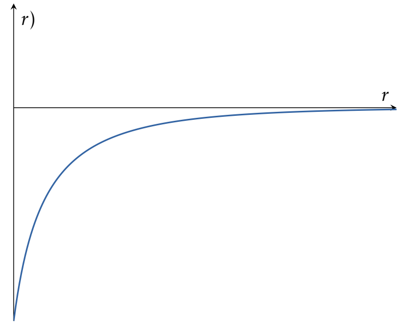
Oscillateur spatial

Rappel harmonique vers le centre de force :



Énergie potentielle de Yukawa (Nobel 1949)

modèle de l'interaction (forte) entre nucléons (protons et neutrons) à courte distance ($\simeq 1\,\text{fm} = 1\cdot 10^{-15}\,\text{m}$)



Conservation du moment cinétique et planéité : rappel

Planéité d'un mouvement à force centrale

Soit un point matériel soumis à une force centrale de centre O fixe dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}_{\text{g}}$.

- Le ***moment cinétique en*** O, $\overrightarrow{\sigma_{/O}}(M) = \sigma_O \vec{e_z}$, est conservé.
- La trajectoire est ***inscrite dans le plan orthogonal à*** $\overrightarrow{\sigma_{/O}}(M)$ passant par O, *ie* le plan défini par la position et la vitesse initiales. On a donc :

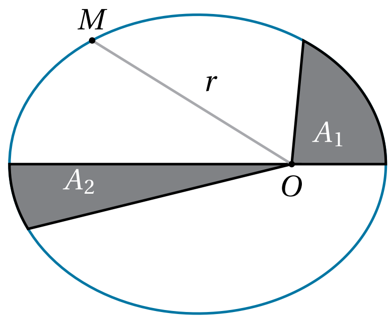
$$\overrightarrow{\sigma_{/O}}(M) = m\vec{r}_0 \wedge \vec{v}_0 = mr^2\dot{\theta}\vec{e_z} \equiv \sigma_c \vec{e_z}.$$

Constante des aires : rappel

Théorème : Constante des aires

Dans un mouvement à force centrale la ***vitesse aréolaire*** est une constante, nommée ***constante des aires***.

- L'aire balayée pendant une durée Δt par le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ est proportionnelle à Δt.
- En particulier, le mouvement de M autour de O s'effectue toujours dans le même sens.



Les aires A_1 et A_2 balayées pendant un même intervalle de temps sont égales.

Énergie potentielle effective

Énergie potentielle effective

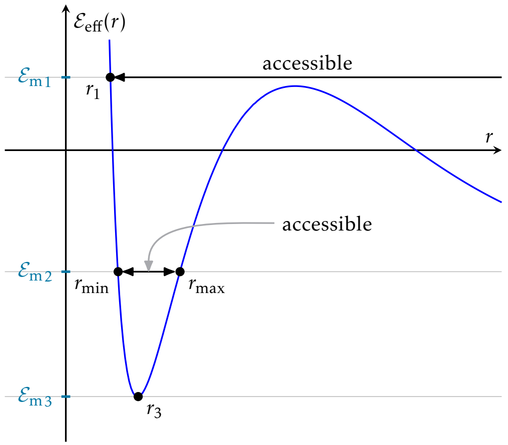
Soit un point matériel de position M dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}_g$, soumis à une force centrale de centre O, conservative, d'énergie potentielle associée $\mathscr{E}_{pot}(r)$.

En notant $r = OM$ et $\overrightarrow{\sigma_c}$ son moment cinétique en O, constant, la conservation de l'énergie s'écrit :

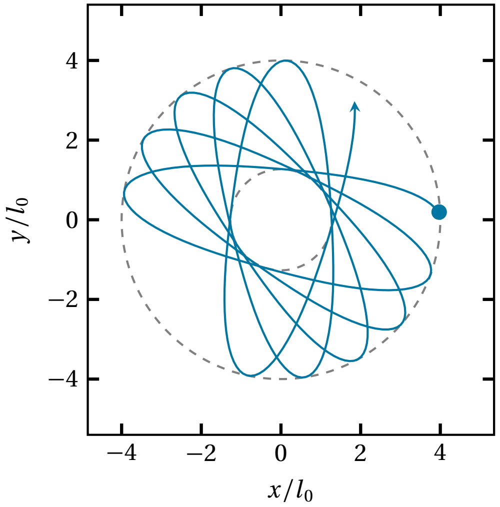
$$\frac{m\dot{r}^2}{2} + \mathscr{E}_{p,\text{eff}}(r) = cste \quad \text{avec : } \mathscr{E}_{p,\text{eff}}(r) = \mathscr{E}_{pot}(r) + \frac{\sigma_c^2}{2mr^2},$$

nommée ***énergie potentielle effective associée au mouvement***. L'étude du mouvement radial est formellement identique à celle d'un point matériel de masse m, animé d'un mouvement à un seul degré de liberté (la seule coordonnée étant r) dans $\mathscr{R}_g$ et soumis à une force conservative d' énergie potentielle $\mathscr{E}_{p,\text{eff}}$.

Nature du mouvement



Interprétation graphique



Définition

Définition : Champ de force newtonien

Un champ de force est dit ***newtonien*** si la force à laquelle est soumis un point matériel est de la forme : $\vec{F} = \frac{-K}{r^2}, \vec{e}_r$, où r est la distance du P.M. à un point fixe O du référentiel d'étude $\mathscr{R}$. O est le ***centre*** du champ de force.

Le mouvement dans un tel champ de force est dit ***keplerien*** s'il s'effectue dans un référentiel galiléen. Il est alors conservatif et on lui associe l'énergie potentielle :

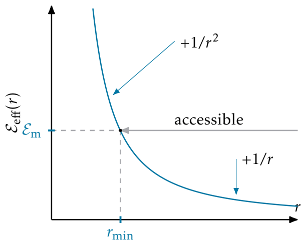
$$\mathscr{E}_{pot}(r) = -\frac{K}{r} + \text{cste}.$$

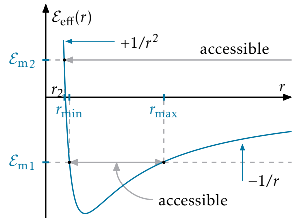
On choisira toujours $\mathscr{E}_{pot}(r) = -\frac{K}{r}$, *ie* $\mathscr{E}_{pot}$ nulle à l'infini du centre.

Allure de $\mathscr{E}_{p,\text{eff}}$

Énergie potentielle effective

$$\mathscr{E}_{p,\text{eff}} = \underbrace{-\frac{K}{r}}_{\text{gouverne en }\infty} + \underbrace{\frac{\sigma_c^2}{2mr^2}}_{\text{gouverne en }0}$$





- force et barrière centrifuge répulsives : états de diffusion quelle que soit $\mathscr{E}_{\text{m}}$ (toujours positive)
- distance minimale d'approche r_{min}

- état de diffusion pour $\mathscr{E}_{\text{m}} > 0$
- état lié entre deux cercles de rebroussement pour $\mathscr{E}_{\text{m}} < 0$

Nature du mouvement

Nature du mouvement et signe de l'énergie mécanique

La nature du mouvement dans un champ de force newtonien dépend du signe de l'énergie mécanique :

- Pour $\mathscr{E}_{\text{m}} > 0$, l'état est ***de diffusion***,
- Pour $\mathscr{E}_{\text{m}} < 0$, l'état est ***lié***.

Interaction électrostatique

Interaction électrostatique

La force exercée par un point matériel ***immobile*** de position P et de ***charge*** q_P sur un point matériel ***immobile*** de position M et de ***charge*** q_M est :

$$\overrightarrow{F}_{P\to M} = \frac{q_M q_P}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} = \frac{q_M q_P}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{e}_{\overrightarrow{PM}}}{PM^2} \quad \text{avec : } \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \simeq 9\cdot 10^9\,\text{S}\cdot\text{I}\cdot$$

Le ***champ*** de force de P est donc ***newtonien***, avec $K = -\frac{q_P q_M}{4\pi\varepsilon_0}$. L'***énergie potentielle*** de M dans ce champ de force sera :

$$\mathscr{E}_{\text{pot}} = \frac{q_P q_M}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Interaction gravitationnelle

Interaction gravitationnelle

La force exercée par un point matériel de position P et de ***masse pesante*** m_P sur un point matériel de position M et de ***masse pesante*** m_M est :

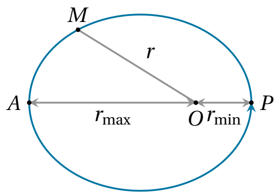
$$\overrightarrow{F}_{P\to M} = -\mathscr{G}\frac{m_P m_M}{PM^3}\overrightarrow{PM} = -\mathscr{G}\frac{m_P m_M}{PM^2}\overrightarrow{e}_{\overrightarrow{PM}}$$

avec : $\mathscr{G} = 6{,}672(10)\,10^{-11}\,\text{N.m}^2\text{kg}^{-2}$.

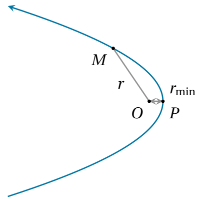
Il s'agit de nouveau d'un champ de force ***newtonien***, avec maintenant $K = \mathscr{G} m_P m_M$. Dans ce champ de force, l'énergie potentielle de M sera :

$$\mathscr{E}_{\text{pot}} = -\mathscr{G}\frac{m_P m_M}{r}.$$

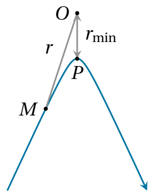
Coniques



État ***lié*** pour une force ***attractive***



État de ***diffusion*** pour une force ***attractive***



État de ***diffusion*** pour une force ***répulsive***

- P= ***périastre*** (périhélie, périgée), A= ***apoastre*** (aphélie, apogée)
- l'état lié est une ***ellipse*** dont O est un foyer (le cercle est un cas particulier) : il est ***remarquable*** que la trajectoire soit fermée
- les états de diffusion sont des ***hyperboles*** contournée (force attractive) ou évitée (force répulsive); on a une ***parabole*** pour $\mathscr{E}_m = 0$.
- ellipse pour un satellite autour d'un astre (gravitation), la distance AP est le ***grand-axe*** de l'ellipse (diamètre pour un cercle)
- hyperbole « attractive » pour une comète autour du soleil
- hyperbole « répulsive » pour un proton dévié par un noyau atomique

Énergie d'un état lié

Énergie mécanique d'un état lié

L'énergie mécanique d'un point matériel ***en état lié*** dans un champ de force newtonien attractif d'énergie potentielle $\mathscr{E}_{pot} = -\frac{K}{r}$ est :

$$\mathscr{E}_m = -\frac{K}{r_{min} + r_{max}},$$

avec r_{min} et r_{max} les distances minimale et maximale atteintes par le point matériel au cours du mouvement.

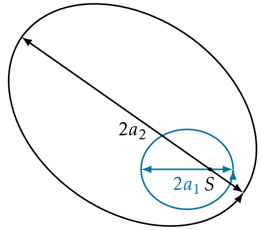
En posant $a = \frac{r_{min}+r_{max}}{2}$ le ***demi-grand axe*** de l'ellipse, on a également : $\mathscr{E}_m = -\frac{K}{2a}$

Caractéristiques astronomiques

À partir des observations astronomiques faites par Nicolas Copernic (N. Copernic (1473-1543), astronome polonais.) et Tycho Brahe (T. Brahe (1546-1601), astronome danois), Johannes Kepler (J. Kepler (1571-1630), astronome allemand.) formule vers 1610 les lois suivantes, relatives au mouvement des planètes dans le système solaire :

Lois de Kepler

1. Chaque planète décrit selon un mouvement périodique, dans le sens direct, une trajectoire elliptique dont le soleil est un foyer.
2. L'aire balayée par le rayon vecteur planète-soleil est proportionnelle au temps mis pour la parcourir.
3. Si on note T la période de révolution de la planète et a le demi grand axe de l'ellipse, le quotient T^2/a^3 est une constante pour toutes les planètes du système solaire.



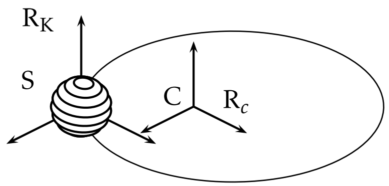
Référentiel d'observation

Définition : Référentiels de Copernic et Kepler

Le référentiel de ***Copernic*** ($\mathscr{R}_C$) est le référentiel :

- dans lequel le centre d'inertie du système solaire est fixe ;
- dont les axes cartésiens pointent vers trois étoiles fixes.

Le référentiel de ***Kepler*** ($\mathscr{R}_K$), dit ***héliocentrique***, est le référentiel ***en translation*** par rapport au référentiel de Copernic mais dont l'origine est confondue avec le ***centre d'inertie du Soleil***.



Paramètres

Paramètres orbitaux

- pour la Terre : ellipse d'excentricité $0,02$ et $a = 1{,}495\,978\,875\cdot 10^{11}\,\mathrm{m} \simeq 1\,\mathrm{au}$, inclinaison 0 (référence)
- excentricité maximale mercure $e = 0,2$, rayon maximal neptune $30\,\mathrm{au}$, rayon minimal mercure $0{,}39\,\mathrm{au}$, inclinaison maximale mercure $7°$

Paramètres physiques

- pour la Terre : masse $m_T = 5{,}9736\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$, rayon $R_T = 6{,}371\cdot 10^{6}\,\mathrm{m}$
- masse et rayon maximaux : Jupiter masse $\simeq 320 m_T$, rayon $11 R_T$
- masse et rayons minimaux : Mercure masse $0{,}064 m_T$, rayon $\simeq 0{,}38 R_T$

Caractéristiques des orbites circulaires

Définition : Satellite

Un satellite est un corps en mouvement dans un ***état lié*** autour d'un astre ***beaucoup plus massif***.

L'***orbite*** d'un satellite est la trajectoire qu'il décrit autour de l'astre sous l'effet de la force de gravitation.

Mouvements circulaires

grandeur	relation à utiliser	expression
v	$-\frac{mv^2}{R} = -\frac{\mathcal{G}M_T m}{R^2}$	$v^2 = \frac{\mathcal{G}M_T}{R}$
$\mathcal{E}_\mathrm{c}$		$\frac{1}{2}\frac{\mathcal{G}M_T m}{R}$
$\mathcal{E}_\mathrm{pot} = -\frac{\mathcal{G}M_T m}{R}$		$\mathcal{E}_\mathrm{m} = \frac{\mathcal{E}_\mathrm{pot}}{2} = -\frac{\mathcal{G}M_T m}{2R}$
T	$\frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R^{3/2}}{\sqrt{\mathcal{G}M_T}}$	$T = 2\pi R^{3/2}/\sqrt{\mathcal{G}M_T}$

3eloi de Kepler

3eloi de Kepler : cas circulaire

La période T et le rayon R de l'orbite circulaire d'un de ses satellites autour d'un astre de masse M vérifient :

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M}.$$

Référentiels géocentrique et terrestre

Définition : Référentiel géocentrique

Le référentiel ***géocentrique*** est le référentiel :

- en ***translation*** par rapport au référentiel de Kepler ;
- d'origine confondue avec le ***centre d'inertie*** C ***de la Terre***.

Mouvement de la Terre dans $\mathcal{R}_K$

Le mouvement de ***révolution*** de la Terre dans le référentiel de Kepler est décrit comme :

- quasi-circulaire (ellipse d'excentricité $e = 0,0167$),
- de rayon moyen $1\,\mathrm{au} = 1{,}495\,978\,706\,91(30)\cdot 10^{11}\,\mathrm{m} \simeq 150\cdot 10^{6}\,\mathrm{km}$ et de période $T_R = 366{,}26\,\text{jours sidéraux} \simeq 365\,\text{jours}$,
- dans un plan dit ***de l'écliptique***.

Mouvement du référentiel terrestre

Le référentiel ***terrestre***, lié à la Terre, est animé dans le référentiel géocentrique d'un mouvement de rotation autour de l'axe des pôles, dans le sens direct, de période $\simeq 24\,\mathrm{h}$.

Différents types d'orbites

orbites basses $h \leqslant 2000\,\mathrm{km}$ lancement peu coûteux, mais faible zone du globe couverte. Télécom (Starlink par exemple), observation scientifique, ISS ($300\,\mathrm{km}$)

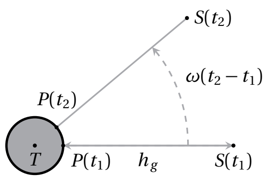
orbites moyennes $2\cdot 10^3\,\mathrm{km} \leqslant h \leqslant 36\cdot 10^3\,\mathrm{km}$ satellites navigation (GPS) qui doivent couvrir une grande partie du globe ($20\cdot 10^3\,\mathrm{km}$)

orbites hautes $h \geqslant 36\cdot 10^3\,\mathrm{km}$: satellites ***géostationnaires*** de télécommunication (pour antennes TV satellites) et satellites météo, satellites militaires qui doivent pouvoir couvrir tous les autres …

Exercice

Déterminer les expressions et les valeurs numériques des grandeurs suivantes :

1. ***1^re^ vitesse cosmique*** v_1 : c'est la vitesse d'un satellite en orbite basse $h \ll R_t$, *ie* la vitesse à lui communiquer pour le satelliser.
2. ***2^e^ vitesse cosmique*** v_2 : c'est la vitesse nécessaire pour qu'un satellite soit en état de diffusion, *ie* échappe à l'attraction terrestre.
3. On lance un satellite d'une orbite basse avec une vitesse v orthoradiale. Tracer l'allure de la trajectoire :
   (a) Pour $v = v_1$
   (b) Pour $v = v_2$
   (c) Pour \$ v$_1$ ⩽ v ⩽ v$_2$\$
   (d) Pour $v = 2v_2$
4. ***Altitude d'un satellite géostationnaire*** C'est un satellite dont la période de révolution est la même que celle de rotation de la Terre, dans le même sens que celle-ci, et dont l'orbite est dans le plan équatorial. Déterminer le rayon R_g de son orbite.



Tous ces mouvements sont étudiés dans le référentiel ***géocentrique***, considéré ***galiléen*** pour la durée des observations. ☠ on n'étudiera jamais d'orbites dans le référentiel ***terrestre***.

Indispensable

Indispensable

- orbites circulaires, à savoir démontrer ***directement***
- formalisme de l'$\mathscr{E}_{\text{pot}}$ effective
- lois de Kepler ($T^2/a^3 =$ cste, pas la valeur de la constante)
- expression de l'énergie d'un état lié
- vitesses cosmiques et orbite géostationnaire